

Chương III. Hàm số số học

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Phần nguyên của một số

Cho số thực x . Ta gọi phần nguyên của x , kí hiệu $[x]$, là số nguyên lớn nhất không vượt quá x .

Chẳng hạn: $[1,2] = 1$; $[7] = 7$; $[-2,4] = -3$.

Định nghĩa trên được diễn đạt dưới một trong hai dạng:

$$[x] = a \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x - a < 1 \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

hoặc

$$[x] = a \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x < a + 1 \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2. Phần phân (phần lẻ) của một số

Với định nghĩa phần nguyên nói trên, mỗi số thực x đều viết dưới dạng tổng của một số nguyên (là $[x]$) với một số không âm nhỏ hơn 1 (là $x - [x]$).

Chẳng hạn: $1,2 = 1 + 0,2$; $7 = 7 + 0$; $-2,4 = -3 + 0,6$.

Số không âm nhỏ hơn 1 nói trên gọi là phần lẻ của x , kí hiệu $\{x\}$. Như vậy $\{x\} = x - [x]$.

Ta có $0 \leq \{x\} < 1$.

3. Số các ước của một số tự nhiên

Kí hiệu $\tau(n)$ là số các ước tự nhiên của n . Nếu $\text{UCLN}(a, b) = 1$ thì $\tau(ab) = \tau(a) \cdot \tau(b)$.

Nếu n có sự phân tích tiêu chuẩn $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ thì

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1).$$

4. Tổng các ước của một số tự nhiên

Kí hiệu $\sigma(n)$ là tổng các ước tự nhiên của n . Nếu $\text{UCLN}(a, b) = 1$ thì $\sigma(ab) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$.

Nếu n có dạng phân tích tiêu chuẩn (*) thì

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \dots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}.$$

Số tự nhiên $n > 0$ được gọi là số hoàn chỉnh nếu $\sigma(n) = 2n$. Số chẵn n là hoàn chỉnh khi và chỉ khi nó có dạng $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$, trong đó $k \geq 2$ và $p = 2^k - 1$ là một số nguyên tố.

5. Hàm Ô-le $\varphi(n)$

Với số nguyên dương n ta định nghĩa $\varphi(n)$ là các số tự nhiên khác không, không vượt quá n và nguyên tố cùng nhau với n .

Với $n > 1$, $\varphi(n)$ chính là số các phần tử khả nghịch của \mathbb{Z}_n . Hàm số $\varphi(n)$ được gọi là hàm Ô-le.

Nếu n có dạng phân tích tiêu chuẩn

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

thì

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

B. Một số dạng bài toán thường gặp

Dạng 1. Tìm phần nguyên của một số

Ví dụ 1. Tìm phần nguyên của số $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}$ (có 100 căn).

Giải

Kí hiệu $a_n = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}$ (có n căn).

Ta có:

$$a_1 = \sqrt{6} < 3$$

$$a_2 = \sqrt{6+a_1} < \sqrt{6+3} = 3$$

$$a_3 = \sqrt{6+a_2} < \sqrt{6+3} = 3$$

.....

$$a_{100} = \sqrt{6+a_{99}} < \sqrt{6+3} = 3$$

Hiển nhiên $a_{100} > \sqrt{6} > 2$. Như vậy $2 < a_{100} < 3$, do đó $[a_{100}] = 2$.

Ví dụ 2. Cho $a = 2 + \sqrt{3}$. Tính $[a^2]$.

Giải

Đặt $x = (2 + \sqrt{3})^2$ thì $x = 7 + 4\sqrt{3}$.

Xét biểu thức $y = (2 - \sqrt{3})^2$ thì $y = 7 - 4\sqrt{3}$.

Suy ra $x + y = 14$.

Dễ thấy $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$ nên $0 < (2 - \sqrt{3})^2 < 1$, tức là $0 < y < 1$. Do đó $13 < x < 14$.

Vậy $[x] = 13$ tức là $[a^2] = 13$.

Dạng 2. Giải phương trình với phần nguyên

Ví dụ. Giải phương trình: $x^2 - 8[x] + 7 = 0$.

Giải

Rút $[x]$ ta được $[x] = \frac{x^2 + 7}{8}$. Giải hệ:

$$\begin{cases} 0 \leq x - \frac{x^2 + 7}{8} < 1 & (1) \\ \frac{x^2 + 7}{8} \in \mathbb{Z} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải (1): } \frac{8x - x^2 - 7}{8} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 7 \quad (3)$$

$$\frac{8x - x^2 - 7}{8} < 1 \Leftrightarrow 8x - x^2 - 7 < 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > 5 \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{Kết hợp (3) và (4): } \begin{cases} 1 \leq x < 3 \\ 5 < x \leq 7 \end{cases} \quad [x] \in \{1; 2; 5; 6; 7\}$$

Ta có:

$[x]$	1	2	5	6	7
$x^2 + 7 (= 8[x])$	8	16	40	48	56
x^2	1	9	33	41	49
x	1	3	$\sqrt{33}$	$\sqrt{41}$	7

$x = 3$ loại vì trái với (4).

Phương trình đã cho có bốn nghiệm: $1; \sqrt{33}; \sqrt{41}; 7$.

Dạng 3. Chứng minh về phần nguyên

Ví dụ. Chứng minh rằng: $[x] + [y] \leq [x + y]$.

Giải

Theo định nghĩa phần nguyên: $0 \leq x - [x] < 1; 0 \leq y - [y] < 1$

Suy ra: $0 \leq (x + y) - ([x] + [y]) < 2$.

Xét hai trường hợp:

- Nếu $0 \leq (x + y) - ([x] + [y]) < 1$ thì $[x + y] = [x] + [y]$.

- Nếu $1 \leq (x + y) - ([x] + [y]) < 2$ thì $0 \leq (x + y) - ([x] + [y] + 1) < 1$ nên $[x + y] = [x] + [y] + 1$.

Trong cả hai trường hợp ta đều có $[x] + [y] \leq [x + y]$.

Dạng 4. Tìm số tự nhiên n với điều kiện cho trước

Ví dụ 1. Tìm các số tự nhiên n có dạng phân tích tiêu chuẩn: $n = p^\alpha q^\beta$ và $\tau(n) = 6, \sigma(n) = 28$.

Giải

Giả sử n có dạng phân tích tiêu chuẩn $n = p^\alpha q^\beta$ và $\alpha \leq \beta$. Khi đó

$$\tau(n) = (\alpha + 1)(\beta + 1) = 6 \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2.$$

$$\text{Suy ra } \sigma(n) = \frac{p^2 - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1} = (p + 1)(q^2 + q + 1) = 4.7. \text{ Do } q \geq 2 \text{ nên } q^2 + q + 1 \geq 7.$$

$$\text{Mặt khác } p + 1 \geq 3 \text{ nên ta có } \begin{cases} p + 1 = 4 \\ q^2 + q + 1 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 3 \\ q = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } n = 3.2^2 = 12.$$

Ví dụ 2. Tìm tất cả các số tự nhiên n biết rằng dạng phân tích tiêu chuẩn $n = 2^\alpha 2^\beta p$ và $\varphi(n) = 180$.

Giải

Với $n = 2^\alpha 2^\beta p$ và $\varphi(n) = 180$ ta có:

$$\varphi(n) = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot p \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 2^{\alpha-1} \cdot 3^{\beta-1} \cdot 2(p-1) = 180 \Rightarrow 2^{\alpha-1} \cdot 3^{\beta-1} \cdot (p-1) = 2.3^2.5.$$

Do p là số nguyên tố lẻ, $p > 3$, nên $p - 1$ chẵn và chia hết cho 5. Vậy $p - 1 = 10k, k = 1, 2, \dots$
 Từ đó suy ra $2^{\alpha-1} \cdot 3^{\beta-1} \cdot k = 3^2$.

Từ tính chất duy nhất của dạng phân tích tiêu chuẩn ta thấy chỉ có thể nhận các giá trị sau:

1) $\alpha = 1, \beta = 1, k = 9$. Khi đó $p = 91$ là hợp số nên trường hợp này bị loại.

2) $\alpha = 1, \beta = 2, k = 3$. Khi đó $p = 31$ và $n = 2.3^2.31$.

3) $\alpha = 1, \beta = 3, k = 1$. Khi đó $p = 11$ và $n = 2.3^2.11$.

Đáp số: $2.3^2.31; 2.3^2.11$.

Dạng 5. Chứng minh n là một số nguyên tố

Ví dụ 1. Chứng minh rằng số tự nhiên $n > 1$ là số nguyên tố khi và chỉ khi $\tau(n) = 2$.

Giải

Nếu $n = p$ là số nguyên tố thì hiển nhiên $\tau(n) = 2$.

Bây giờ ta chứng minh điều ngược lại. Giả sử $\tau(n) = 2$ và n là hợp số:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}, \quad k > 1, \alpha_i \geq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Khi đó

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1) \geq 2^k > 2$$

trái với giả thiết.

Vậy n là nguyên tố.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với $n > 2$ ta có $\varphi(n) > 1$. Từ đó suy ra rằng có vô số số nguyên tố.

Giải

- Giả sử $n > 2$. Khi đó $U'CLN(n - 1, n) = U'CLN(n, 1) = 1$.

Hai số 1 và $n - 1$ nguyên tố cùng nhau với n nên $\varphi(n) > 1$.

- Giả sử chỉ có k số nguyên tố $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_k$.

Đặt $n = p_1 p_2 \dots p_k, n > 2$.

Giả sử a là một số tự nhiên, $1 < a < n$, thế thì a có ước nguyên tố p_i nằm trong k số nguyên tố nói trên.

Từ đó $U'CLN(a, n)$ chia hết cho p_i , nghĩa là a không nguyên tố cùng nhau với n.

Vậy $\varphi(n) = 1$, mâu thuẫn với điều chứng minh trên.